

**Aufgabe 1: Würfelglück**

Für diese Aufgabe benötigst du einen normalen Spielwürfel mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Hexa würfelt mit einem normalen Spielwürfel so oft bis sie alle Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 mindestens einmal gewürfelt hat. Ihr Ergebnis sieht so aus:

3, 4, 3, 4, 5, 5, 2, 6, 3, 5, 5, 2, 4, 6, 6, 1. Sie musste also 16 mal würfeln, um alle Zahlen zu erhalten.

Ihr Bruder Goni versucht es ebenfalls. Sein Ergebnis:

1, 5, 1, 1, 6, 1, 2, 2, 5, 4, 5, 4, 3. Er musste nur 13 mal würfeln.

a.) Nun bist du dran: würfle einen Würfel so oft bis du alle Ziffern einmal erhalten hast. Notiere die gewürfelten Zahlen wie Hexa und Goni. Führe das Spiel anschließend mit 7 weiteren Personen durch (Eltern, Geschwister, Großeltern, Verwandte, Freunde, Bekannte ...). Notiere wie Hexa immer die Reihenfolge der gewürfelten Zahlen.

b.) Notiere die Anzahl für jede Durchführung inklusive Hexa und Goni. So erhältst du 10 Zahlen (bei Hexa wäre es die 16, bei Goni die 13). Gib dann folgende Werte an (inklusive Hexa und Goni):

- **Minimum:** Die kleinste Anzahl benötigter Würfe, um alle 6 Zahlen zu erhalten.
- **Maximum:** Die größte Anzahl benötigter Würfe, um alle 6 Zahlen zu erhalten.
- **Mittelwert (arithmetisch):** Addiere alle Anzahlen und teile sie durch die Anzahl der Personen, die mitgespielt haben (10).
- **Ab Klasse 5:**

**Median:** Streiche von der Anzahl der Durchführungen die größte und die kleinste Zahl. Es verbleiben 8 Zahlen. Streiche wieder die größte und die kleinste Zahl. Fahre fort bis nur noch 2 Zahlen übrig sind (sollten irgendwann alle Zahlen gleich sein, streichst du 2 gleiche Zahlen). Berechne den Median = Durchschnitt der beiden verbliebenen Zahlen.

**Spannweite:** Berechne die Differenz zwischen Maximum und Minimum.

c.) **Für alle:** Mit wie vielen Würfeln muss man im Mittel rechnen, um mit einem normalen Spielwürfel alle Zahlen von 1 bis 6 zu würfeln?

d.) **Ab Klasse 6:** Die Wahrscheinlichkeit gibt an, wie wahrscheinlich ein bestimmtes Ereignis ist. Da ein Würfel 6 Seiten (6 Zahlen) hat, ist die Wahrscheinlichkeit eine 2 zu würfeln  $\frac{1}{6}$  (eine von 6 Möglichkeiten). Gib folgende Wahrscheinlichkeiten an:

- eine 6 würfeln
- eine gerade Zahl würfeln
- eine Zahl kleiner als 5 würfeln.

e.) **Ab Klasse 7:** Kommen wir zurück zum Spiel: Der erste Wurf gibt mit einer Wahrscheinlichkeit von

$\frac{6}{6}$  bzw. 1 eine Zahl, die noch nicht gewürfelt wurde. Somit braucht man genau einen Wurf, um eine Zahl zu würfeln, die man noch nicht hatte. Beim zweiten Wurf kann man 5 Zahlen würfeln, die man noch nicht hatte. Die Wahrscheinlichkeit im zweiten Wurf eine Zahl zu würfeln, die man noch nicht hat, beträgt somit  $\frac{5}{6}$ .

Man braucht im Mittel  $\frac{6}{5} = 1,2$  Würfe für die zweite Zahl. Insgesamt (mit dem Wurf für die erste Zahl) also 2,2 Würfe.

Berechne wie viele Würfe man im Mittel für 3, 4, 5 und 6 verschiedene Zahlen benötigt.

f.) **Ab Klasse 7:** Das Sammeln von Bildern für Sammelalben (z.B. Fußball), kann man sich wie einen großen Würfel vorstellen. Ein solches Sammelalbum beinhaltet etwa 500 Sammelkarten (oft sogar deutlich mehr). Jede Sammelkarte steht für eine Zahl von 1 bis 500. Alle Sammelkarten zu erhalten, ist also vergleichbar mit: den 500seitigen Würfel würfeln bis man alle Zahlen mindestens einmal gewürfelt hat. Auch hier gilt: die erste Sammelkarte ist sicher eine, die man noch nicht hat. Bei der zweiten Karte beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Karte, die man noch nicht hat  $\frac{499}{500}$  (fast 1). Bei der letzten Karte aber beträgt die Wahrscheinlichkeit schon  $\frac{1}{500}$  und man müsste für die letzte Karte/Zahl 500 Mal im Mittel würfeln. Um die Anzahl aller erforderlichen Würfe herauszufinden, muss man  $\frac{500}{500} + \frac{499}{500} + \frac{498}{500} + \dots + \frac{3}{500} + \frac{2}{500} + \frac{1}{500}$  berechnen. Suche im Internet oder in mathematischen Büchern unter dem Stichwort harmonische Reihe und gib mit Hilfe der dort gefundenen Informationen an, wie viele Sammelbilder man im Mittel kaufen muss, um ein Sammelalbum mit 500 Stickern zu füllen (es wird hier außer Acht gelassen, dass auch getauscht werden könnte). Erläutere deine Überlegungen.



**BITTE WENDEN**

**Aufgabe 2: Fehlende Ziffern**

Bei einigen Rechnungen sind Ziffern verloren gegangen. Finde die fehlenden Ziffern und begründe, wie du sie gefunden hast.

a.) **Für Klasse 4 (Additionsaufgabe) und 5 (alle drei Aufgaben):**

Jeder \* steht für eine Ziffer. Die Ziffern können gleich oder verschieden sein.

$$\begin{array}{r}
 * 5 * 8 \\
 + 5 * 3 * \\
 \hline
 * 0 2 0 9
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 6 3 \cdot * * \\
 \hline
 * * \\
 * * \\
 \hline
 * * *
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7 8 5 \cdot * * * \\
 \hline
 * * * \\
 1 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * *
 \end{array}$$

b.) **Für Klasse 6 und 7:**

Finde die Ziffern.  
 x, y, und z sind verschiedene Ziffern, außer 0.  
 a, b, c, d, e, f, g, h, i sind verschiedene Ziffern.  
 Der \* steht für eine beliebige Ziffer. Die \* können unterschiedliche Ziffern sein.

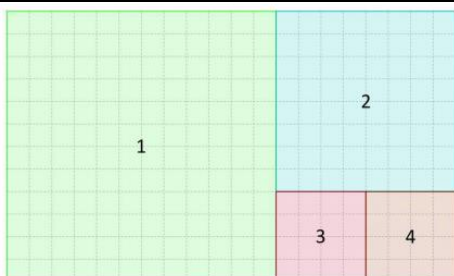
$$\begin{array}{r}
 x x x x \\
 + y y y y \\
 + z z z z \\
 \hline
 y x x x z
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 a b c \\
 + d e f \\
 \hline
 g h i
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 * * * \cdot * 8 * \\
 * * * * \\
 * * * \\
 * * * * \\
 \hline
 * * * * * 5
 \end{array}$$

c.) **Für alle:**

Ermittle die Werte für das Dreieck, den Stern und das Quadrat, wenn für den Kreis die Zahl 60 stehen soll.

$$\begin{aligned}
 \square &= \triangle + \bigcirc \\
 \bigcirc + \square &= \triangle + \triangle + \triangle + \triangle + \triangle \\
 * &= \square + \triangle
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 3: Ein Rechteck und viele Quadrate**



Quadro hat ein Rechteck gezeichnet. Es ist 20 Kästchen lang und 12 Kästchen breit. In dieses Rechteck zeichnet er nun ein möglichst großes Quadrat ein. Dieses Quadrat hat die Seitenlänge 12 Kästchen. In das Restrechteck zeichnet er wieder das größtmögliche Quadrat ein – es hat die Seitenlänge 8 Kästchen.

Wieder verbleibt ein Rechteck, in das ein Quadrat eingezeichnet werden kann. Es ergeben sich sogar 2 weitere Quadrate mit jeweils 4 Kästchen Seitenlänge. Das ursprüngliche Rechteck wurde also in vier Quadrate zerlegt. Auf die beschriebene Art und Weise erhält man immer die kleinstmögliche Anzahl an Quadraten.

a.) Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 21 Kästchen und 13 Kästchen. Zerlege dieses Rechteck in möglichst wenig Quadrate. Gehe dazu wie Quadro vor. Nummeriere die Quadrate wie Quadro.

b.) Gegeben ist ein Rechteck, das 99 Kästchen lang und 30 Kästchen breit ist. Skizziere die Zerlegung in Quadrate nach Quados Methode.

Anmerkung: Skizziere bedeutet, dass du eine Skizze anfertigst. Diese muss nicht wirklich 99 Kästchen lang und 30 breit sein. Fertige die Skizze so an, dass du damit gut arbeiten kannst. Gib an, welche Seitenlänge die kleinsten Quadrate haben.

c.) **Ab Klasse 5:** Gib die Seitenlänge des kleinsten Quadrats an, wenn das Startrechteck 462 Kästchen lang und 195 Kästchen breit ist.

d.) **Ab Klasse 6:** Quados Rechteck hatte die Seitenlängen 20 und 12. Das kleinste Quadrat hatte die Seitenlänge 4. Du hast weitere Rechtecke betrachtet. Ergänze damit die Tabelle:

Seitenlänge a Rechteck	20	21	99	462
Seitenlänge b Rechteck	12	13	30	195
Seitenlänge kleinstes Quadrat	4			

Recherchiere zum Thema größter gemeinsamer Teiler (ggT) und erläutere an einem selbst gewählten Beispiel mit deinem Wissen aus a.) bis c.) wie man den ggT zweier Zahlen zeichnerisch ermitteln kann.

**Aufgabe 4: Reihe fortsetzen**

Gib an, welches der Bilder A, B, C, D auf die obige Reihe 1, 2, 3, 4 folgt und begründe deine Entscheidung.

